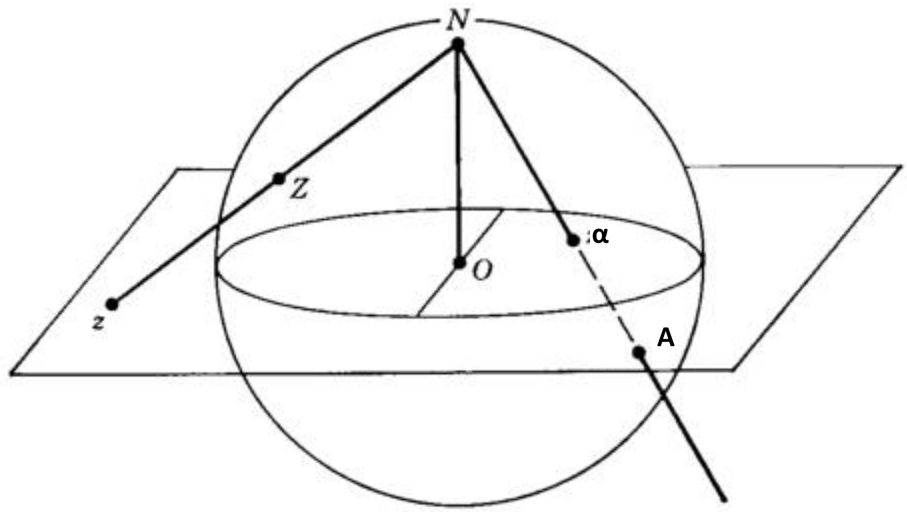
ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

6 ΓΕΛ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ – ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2023

Η εργασία, που δόθηκε τον Δεκέμβριο του 2022, ήταν προαιρετική και διακπεραιώθηκε από τους μαθητές Ελευθερία Δαμαλή, Βάσω Δρακονταειδή, Γιώργο Καραχάλιο, Ιωάννα Σερέτη σε διάστημα κάποιων μηνών. Τελικά γράφτηκε και σε ψηφιακή μορφή τον Απρίλιο 2023.

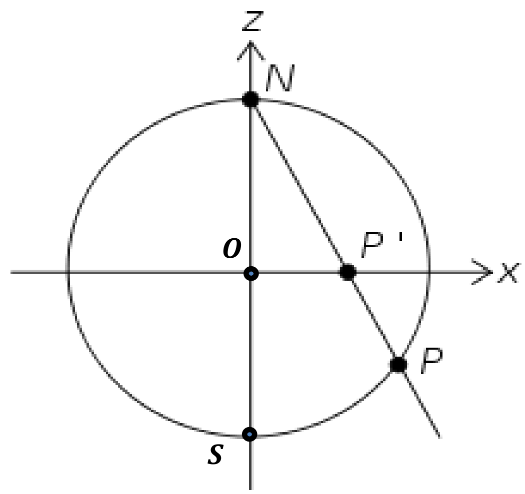
ΣΤΕΡΕΟΓΡΑΦΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ και ΣΗΜΕΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ



Το πρώτο βήμα στην <u>κατασκευή χαρτών</u> είναι να πετύχουμε μια αντιστοιχία κάθε σημείου της σφαιρικής επιφάνειας με το επίπεδο. Εδώ, επιλέγουμε το επίπεδο που διέρχεται από τον ισημερινό. Θεωρούμε στο σχήμα ένα ακλόνητο σημείο N στο βόρειο πόλο και σημείο Z στην επιφάνεια της σφαίρας. Τότε φέροντας την ευθεία NZ προσδιορίζεται στο επίπεδο το σημείο z. Αντίστοιχα το σημείο A στην επιφάνεια της σφαίρας αντιστοιχεί στο σημείο α του επιπέδου. **Γνωρίζοντας τις συντεταγμένες των σημείων z, α στο χάρτη-επίπεδο, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες των πραγματικών σημείων Z, A; Καθώς η απόσταση των z, α στο επίπεδο μπορεί εύκολα να βρεθεί, μήπως μπορούμε να βρούμε την απόσταση των Z, A στον τρισδιάστατο χώρο και ακόμα καλύτερα το πραγματικό μήκος που έχει να διανύσει κάποιος πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας για να πάει από το Z στο A;** Επίσης παρατηρούμε ότι όσο το σημείο Z πλησιάζει στον Πόλο N τόσο το z απομακρύνεται από την αρχική του θέση προς το **«άπειρο».** Και όπως φαίνεται δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου που να αντιστοιχεί στο ίδιο το N. **Πώς μπορούμε άραγε να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία και να μετράμε αποστάσεις και από το N; Τι επιπτώσεις έχει αυτό για τη μέτρηση στο επίπεδο;**

Με τις γνώσεις που έχουμε, <u>θα δουλέψουμε μια διάσταση πιο κάτω</u>, δηλαδή αντί της σφαίρας και του επιπέδου θα θεωρήσουμε κύκλο και ευθεία που περνάει από το κέντρο του.

Βλέπουμε εδώ το σημείο P του κύκλου να αντιστοιχίζεται στο σημείο P' της ευθείας $x'x$. Προφανώς ο Νότιος πόλος S αντιστοιχεί στο σημείο O της ευθείας, ενώ πάλι ο βόρειος σε κανένα.

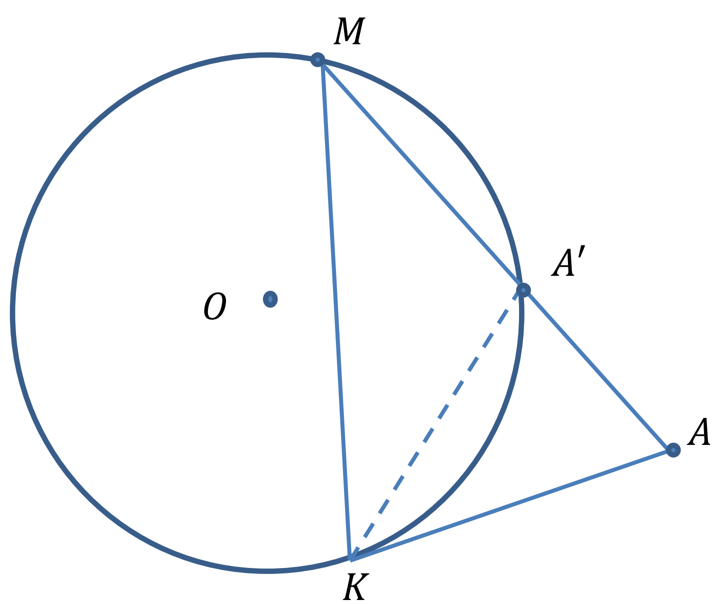


Θα αναλύσουμε το πρόβλημα σε μια σειρά από ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Ευκλείδεια γεωμετρία-Θεώρημα Δύναμης

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και ακτίνας ρ. Έστω σημείο A εκτός κύκλου και τυχούσα ευθεία ε από το A που τέμνει τον κύκλο στα A' και M. Έστω ακόμα AK εφαπτόμενη στον κύκλο. Δείξτε με ομοιότητα τριγώνων ότι

$$(AA')\cdot(AM)=(AK)^2=(AO)^2-\rho^2$$



ΛΥΣΗ

<u>*Αρχικά θέλω:*</u> $(AA')(AM) = (AK)(AK)$, ισοδύναμα $(AA')/(AK) = (AK)/(AM)$

<u>*Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΚΑ΄ και ΑΚΜ:*</u> Έχουν $\hat{A} = \hat{A}$, $A'\widehat{K}A = A\widehat{M}K$ (:θεώρημα υπό χορδής και εφαπτομένης), άρα είναι όμοια, $AKA' \approx AKM$. Επομένως,

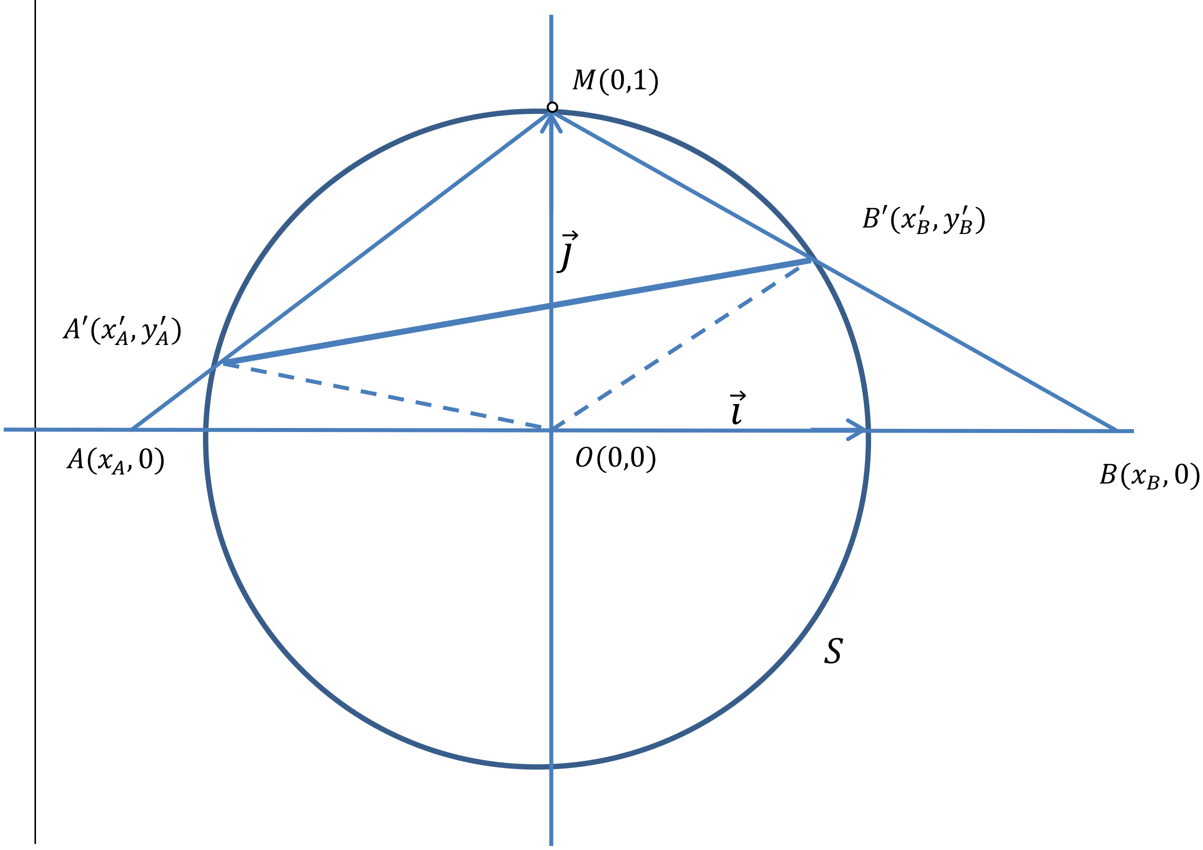
$$AA'/AK = AK / AM$$

Επίσης, το τρίγωνο OKA είναι ορθογώνιο γιατί OK ακτίνα και AK εφαπτομένη

Άρα $OA^2 = OK^2 + KA^2 \Leftrightarrow AK^2 = OA^2 - \rho^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Υπολογισμός της απόστασης δύο σημείων πάνω στο κύκλο από τις προβολές τους στην ευθεία – Συντεταγμένες.

Θεωρούμε την πραγματική ευθεία $x'x$ και τα σημεία A, B πάνω στην ευθεία με τετμημένες x_A, x_B αντίστοιχα. Θεωρούμε τον κύκλο S κέντρου $O(0,0)$ με Βόρειο πόλο $M(0,1)$ και ακτίνα $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1}$. Έστω A' η τομή της ευθείας MA με τον κύκλο και B' η τομή της ευθείας MB με τον κύκλο. Επίσης $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$. Υπενθυμίζουμε γενικά για όποια σημεία K, Λ το συμβολισμό $|\overrightarrow{K\Lambda}| = (K\Lambda) =$ μέτρο (μήκος του $\overrightarrow{K\Lambda}$).



Τονίζουμε ότι οι δεδομένες ποσότητες εδώ είναι οι τετμημένες x_A, x_B πάνω στην ευθεία, διότι αυτές μπορούν να μετρηθούν εύκολα (αντιστοιχία με χάρτη).

1) Με τη βοήθεια της Άσκησης 1, δείξτε ότι $(MA')\cdot(MA) = 2$

2) Δείξτε ότι το διάνυσμα θέσης του A' είναι το $\overrightarrow{OA'} = \vec{j} + \frac{2(\overrightarrow{OA}-\vec{j})}{\left|\overrightarrow{OA}-\vec{j}\right|^2}$

3) Δείξτε ότι το $\overrightarrow{OA'}$ έχει συντεταγμένες $\overrightarrow{OA'} = \left(\frac{2x_A}{|x_A|^2+1}, \frac{|x_A|^2-1}{|x_A|^2+1}\right)$. Γράψτε και το αντίστοιχο για το σημείο B'. Δηλαδή ουσιαστικά έχουμε γράψει τις συντεταγμένες των A', B' συναρτήσει των συνταταγμένων των A, B.

4) Δείξτε ότι η απόσταση $(A'B')$ ισούται με

$$\left|\overrightarrow{B'A'}\right| = \frac{2|x_A - x_B|}{\left|\overrightarrow{OA}-\vec{j}\right|\left|\overrightarrow{OB}-\vec{j}\right|} = \frac{2|x_A - x_B|}{\sqrt{|x_A|^2+1}\sqrt{|x_B|^2+1}}$$

δηλαδή **μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση των $\boldsymbol{A', B'}$ συναρτήσει της απόστασης $\boldsymbol{|x_A - x_B|}$ των $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$.**

ΛΥΣΗ

1) $Θέλω\ (MA')(MA) = 2$

$(MA')(MA) = [(MA)-(AA')](MA) = (MA)^2 - (MA)(AA') \quad (1)$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AMO έχουμε:

$(MA)^2 = (OA)^2 + (OM)^2 = (OA)^2 + 1 \quad (2)$

Από Άσκηση 1 έχουμε:

$(MA)(AA') = (OA)^2 - \rho^2 = (OA)^2 - 1 \quad (3)$

Από (1),(2),(3) έχουμε:

$(MA')\cdot(MA) = (OA)^2 + 1 - [(OA)^2 - 1] \quad = (OA)^2 - (OA)^2 + 1 + 1 = 2$

2) Θέλω $\overrightarrow{OA'} = \vec{j} + \frac{2(\overrightarrow{OA}-\vec{j})}{\left|\overrightarrow{OA}-\vec{j}\right|^2}$, δηλαδή,

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{OM} + \frac{2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})}{\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\right|^2}$. Αυτό προκύπτει από την

$\overrightarrow{\mathrm{MA}'} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{MA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2}$ διότι για τα μέτρα τους ισχύει $(\mathrm{MA}') = \frac{2(MA)}{(MA)(MA)}$,

λόγω του ερωτήματος (1), ενώ τα $\overrightarrow{MA'}$, $\overrightarrow{MA}$ είναι και συγγραμμικά.

3) Από (2) έχω $\overrightarrow{\mathrm{OA}'} = \vec{\mathrm{j}} + \frac{2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}}|^2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}'} = (0,1) + \frac{2[(x_A,0)-(0,1)]}{|(x_A,0)-(0,1)|^2} = (0,1) + \frac{2(x_A,-1)}{|(x_A,-1)|^2} = (0,1) + \frac{(2x_A,-2)}{\sqrt{x_A{}^2+1}^2} = (0,1) + \frac{(2x_A,-2)}{|x_A|^2+1} = \frac{(|x_A|^2+1)(0,1)}{|x_A|^2+1} + \frac{(2x_A,-2)}{|x_A|^2+1} = \frac{(0,|x_A|^2+1)+(2x_A,-2)}{|x_A|^2+1} = \frac{(2x_A,|x_A|^2+1-2)}{|x_A|^2+1} = \frac{(2x_A,|x_A|^2-1)}{|x_A|^2+1} = \left(\frac{2x_A}{|x_A|^2+1}, \frac{|x_A|^2-1}{|x_A|^2+1}\right)$$

Όμοια, $\overrightarrow{\mathrm{OB}'} = \left(\frac{2x_B}{|x_B|^2+1}, \frac{|x_B|^2-1}{|x_B|^2+1}\right)$.

4) $|\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{A}'}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}'} - \overrightarrow{\mathrm{OB}'}| = \left|\vec{\mathrm{j}} + \frac{2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}}|^2} - \left(\vec{\mathrm{j}} + \frac{2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}}|^2}\right)\right| =$

$$2\left|\left(\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}}|^2} - \frac{(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}}|^2}\right)\right| = 2\left\{\left(\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}}|^2} - \frac{(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}}|^2}\right)^2\right\}^{1/2} =$$

$$2\left\{\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}}|^2} - \frac{2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}})(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}}|^2} + \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}}|^2}\right\}^{1/2} =$$

$$2\left\{\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}}|^2 - 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}})(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}}) + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}}|^2}\right\}^{1/2} =$$

$$2\left\{\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{j}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{j}}|^2}\right\}^{1/2} = \frac{2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{j}||\overrightarrow{OB}-\vec{j}|}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ποιός είναι ο πραγματικός δρόμος $A'B'$ πάνω στον κύκλο, δηλαδή ποιό είναι το μήκος του τόξου $\widehat{A'B'}$;

1) Δείξτε ότι αν $\hat{\theta}$ είναι η γωνία σε ακτίνια των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA'}$ και $\overrightarrow{OB'}$ τότε

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{4x_A x_B + (|x_A|^2 - 1)(|x_B|^2 - 1)}{(|x_A|^2 + 1)(|x_B|^2 + 1)}$$

κι έτσι θεωρούμε τη γωνία θ γνωστή.

2) Δείξτε ότι το μήκος L του τόξου $\widehat{A'B'}$ είναι $L = \theta$.

ΛΥΣΗ

1) Γνωρίζουμε $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB'}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}||\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|}$ ενώ από την Άσκηση 2 έχουμε

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = (\frac{2x_A}{|x_A|^2+1}, \frac{|x_A|^2-1}{|x_A|^2+1})$ και $\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = (\frac{2x_B}{|x_B|^2+1}, \frac{|x_B|^2-1}{|x_B|^2+1})$. Αντικαθιστώντας, προκύπτει εύκολα το ζητούμενο.

2) Προκύπτει από τη γνωστή σχέση που συνδέει μήκος τόξου και ακτίνα, εδώ, $\mathrm{L} = R\theta = \theta$, εφόσον η ακτίνα είναι ίση με 1.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΗ 4: Ένας νέος «χώρος».

Με τα προηγούμενα **έχουμε πετύχει μια αντιστοιχία κάθε σημείου $\mathbf{A}$ της πραγματικής ευθείας, σε ένα σημείο $\mathbf{A'}$ του κύκλου** ως τομή της MA με το κύκλο. Αν συμβολίσουμε με $\boldsymbol{R}$ την πραγματική ευθεία $x'x$ και με S τον κύκλο, θεωρήσαμε ουσιαστικά μια αντιστοιχία

$$\boldsymbol{R} \to S$$

$$A \to A'$$

που πάει δηλαδή το A στο A' και μάλιστα με συγκεκριμένο τύπο που δείχθηκε στο 3) της άσκησης 2. Δηλαδή

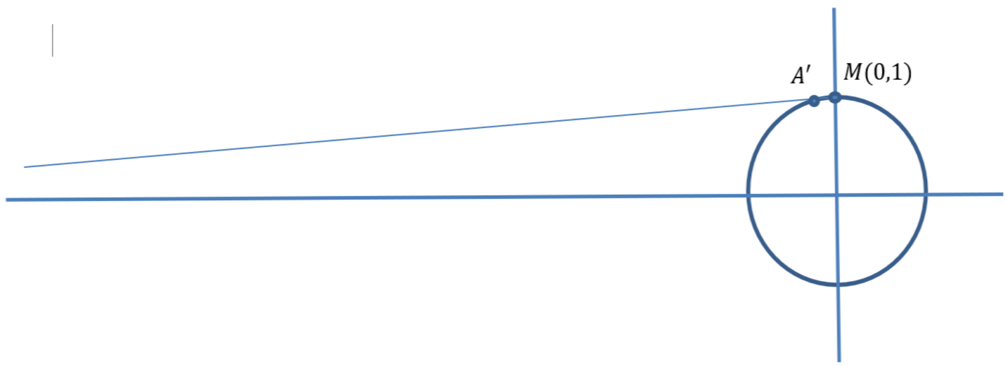
$$A(x_A, 0) \to A'(x'_A, y'_A)$$

με

$$x'_A = \frac{2x_A}{|x_A|^2+1}\,, \quad y'_A = \frac{|x_A|^2-1}{|x_A|^2+1}$$

1) **<u>Το αντίστροφο ισχύει;</u>** Δηλαδή αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο A' του κύκλου και φέρουμε την ευθεία MA' τότε καθορίζεται και ένα σημείο πάνω στην πραγματική ευθεία $x'x$; **<u>Δίνουμε την απάντηση</u>**:

Η απάντηση είναι όχι για το ίδιο το σημείο M. Παρατηρούμε ότι όσο τα σημεία A' πλησιάζουν το M, τόσο η ευθεία MA' <u>τείνει</u> να γίνει παράλληλη με τον άξονα $x'x$ κι έτσι για σημεία A' πολύ κοντινά στο M η ευθεία MA' τέμνει τον $x'x$ «πολύ μακρυά» από το $O(0,0)$.



Όταν λοιπόν το A' «πέσει» πάνω στο M τότε η MA' γίνεται εφαπτομένη στο M και άρα παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Συμπερασματικά, ενώ κάθε σημείο του $\boldsymbol{R}$ (άξονα $x'x$) αντιστοιχίζεται σε κάποιο σημείο του κύκλου S, η αντίστροφη αντιστοίχιση, ας τη συμβολίσουμε

$$S - \{M\} \to \boldsymbol{R}$$

$$A' \to A$$

συμβαίνει για όλα τα σημεία του S εκτός του M.

Με αυτά όμως που προηγήθηκαν θα μπορούσαμε να πούμε διαισθητικά ότι **το $\boldsymbol{M}$ αντιστοιχίζεται στο «άπειρο».** Για να ξεπεράσουμε λοιπόν, τη δυσκολία, <u>θεωρούμε ένα σημείο που συμπληρώνει την ευθεία</u> $\boldsymbol{R}$ και λέμε ότι βρίσκεται στο άπειρο. Το συμβολίζουμε με ∞ και έχουμε την αντιστοιχία

$$M \to \infty$$

ενώ την ευθεία $\boldsymbol{R}$ μαζί με το νέο συμπληρωματικό σημείο ∞ τη συμβολίζουμε $\overline{\boldsymbol{R}}$**.**

2) <u>Αποδείξτε</u>, όπως στην Άσκηση 2(4) ότι η απόσταση του σημείου $A'(x_A', y_A')$ από το $M(0,1)$ δίνεται ως

$$\left|\overrightarrow{A'M}\right| = \frac{2}{\sqrt{|x_A|^2 + 1}}$$

3) Στο σημείο αυτό ας επικεντρωθούμε στην ευθεία $x'x$ δηλαδή στο $\boldsymbol{R}$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση δύο σημείων A, B δίνεται ως $(AB) = |x_A - x_B|$. Με όσα όμως προηγήθηκαν, **μπορούμε να ορίσουμε <u>μια καινούρια έννοια απόστασης</u> πάνω στην ευθεία $\boldsymbol{R}$ αλλά και στην ευθεία $\overline{\boldsymbol{R}}$.**

Συγκεκριμένα ορίζουμε την νέα απόσταση των A, B να είναι η απόσταση των εικόνων τους A', B' πάνω στον κύκλο, δηλαδή, λόγω της άσκησης 2(4) ορίζουμε:

$$\|AB\| = \frac{2|x_A - x_B|}{\sqrt{|x_A|^2 + 1}\sqrt{|x_B|^2 + 1}}$$

Κατά συνέπεια λόγω του προηγούμενου ερωτήματος 2) θα μπορούσαμε να ορίσουμε και την **απόσταση οποιουδήποτε σημείου $\boldsymbol{A}$ της ευθείας από το σημείο** ∞ να είναι

$$\|A\infty\| = \frac{2}{\sqrt{|x_A|^2 + 1}}$$

<u>Αποδείξτε</u> ότι και για την καινούρια αυτή έννοια απόστασης στην ευθεία $\overline{\boldsymbol{R}}$ ισχύει **η τριγωνική ανισότητα:**

$$\|\boldsymbol{B\Gamma}\| \leq \|\boldsymbol{AB}\| + \|\boldsymbol{A\Gamma}\|$$

Έτσι για τα σημεία του καινούργιου αυτού «χώρου» $\overline{\boldsymbol{R}}$ ισχύουν οι **ιδιότητες μετρικής**, δηλαδή

$$\|\boldsymbol{AA}\| = \boldsymbol{0}$$

$$\|\boldsymbol{AB}\| = \|\boldsymbol{BA}\|$$

$$\|\boldsymbol{B\Gamma}\| \leq \|\boldsymbol{AB}\| + \|\boldsymbol{A\Gamma}\|$$

για οποιαδήποτε σημεία του A, B, Γ.

4) Με την καινούρια αυτή έννοια απόστασης υπάρχουν σημεία $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ διαφορετικά μεταξύ τους που να "απέχουν από το άπειρο" ίση απόσταση; Μήπως <u>κάθε σημείο</u> $\boldsymbol{A}$ της $\overline{\boldsymbol{R}}$ έχει ένα «συμμετρικό» ως προς το "άπειρο" σημείο $\boldsymbol{B}$ (δηλαδή να απέχουν

εξίσου από το ∞); Έτσι θα έχουμε δύο σημεία πάνω στην $\overline{R}$ ως προς τα οποία κάθε άλλο σημείο έχει "συμμετρικό". Ποιά είναι αυτά;

Με αυτή τη παρατήρηση μπορείτε να φανταστείτε με τι σχήμα μοιάζει η $\overline{R}$;

Υπάρχει σημείο του $\overline{R}$ που να απέχει εξίσου από το 0 και το ∞; Ποιά είναι η εικόνα του στον κύκλο μέσω στης αντιστοιχίας $R \to S$;

ΛΥΣΗ

Η (1) έχει ήδη σχολιαστεί.

2) Θέλω $\left|\overrightarrow{A'M}\right| = \frac{2}{\sqrt{|X_A|^2+1}}$

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{A'M}\right| = \left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA'}\right| &= \left|(x_M, y_M) - \left(\frac{2X_A}{|X_A|^2+1}, \frac{|X_A|^2-1}{|X_A|^2+1}\right)\right| \\
&= \left|(0,1) - \left(\frac{2x_A}{|X_A|^2+1}, \frac{|X_A|^2-1}{|X_A|^2+1}\right)\right| \\
&= \left|\left(-\frac{2x_A}{|X_A|^2+1}, 1 - \frac{|X_A|^2-1}{|X_A|^2+1}\right)\right| \\
&= \left|\left(-\frac{2x_A}{|X_A|^2+1}, \frac{|X_A|^2+1-|X_A|^2+1}{|X_A|^2+1}\right)\right| \\
&= \left|\left(-\frac{2x_A}{|X_A|^2+1}, \frac{2}{|X_A|^2+1}\right)\right| \\
&= \sqrt{\left(-\frac{2x_A}{|X_A|^2+1}\right)^2 + \frac{4}{(|X_A|^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{4|X_A|^2+4}{(|X_A|^2+1)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{4(|X_A|^2+1)}{(|X_A|^2+1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{|X_A|^2+1}}
\end{aligned}$$

3) Θέλω $\left||A\Gamma|\right| \leq \left||AB|\right| + \left||B\Gamma|\right|$, όπου Γ τυχόν σημείο της ευθείας R. Σύμφωνα με ό,τι προηγήθηκε, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(A'\Gamma') \leq (A'B') + (B'\Gamma')$$

όπου A', B', Γ' είναι οι αντίστοιχες εικόνες πάνω στον κύκλο των σημείων A, B, Γ της ευθείας R. Έτσι το ζητούμενο απλά είναι η γνωστή τριγωνική ανισότητα στο επίπεδο. Αν τώρα το Γ είναι το σημείο ∞ της $\overline{\boldsymbol{R}}$, τότε αυτό θα αντιστοιχεί στο σημείο M του κύκλου και το συμπέρασμα πάλι προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα.

4) 1ο υποερώτημα

Ξέρουμε ότι για κάθε σημείο ισχύει $\left||A\infty|\right| = \frac{2}{\sqrt{|X_A|^2+1}}$

Άρα εμείς θέλουμε:

$$\left||A\infty|\right| = \left||B\infty|\right|$$

$$\frac{2}{\sqrt{|X_A|^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{|X_B|^2+1}}$$

$$\frac{4}{\left||X_A|^2+1\right|} = \frac{4}{\left||X_B|^2+1\right|}$$

$$\left||X_A|^2+1\right| = \left||X_B|^2+1\right|$$

- Άρα $|X_A|^2 + 1 = |X_B|^2 + 1 \leftrightarrow |X_A|^2 = |X_B|^2 \leftrightarrow X_A = \pm X_B$

Αλλά το $X_A = X_B$ απορρίπτεται, γιατί $A \neq B$.

- Ή

$$|X_A|^2 + 1 = -|X_B|^2 - 1$$

$$|X_A|^2 + 2 = -|X_B|^2$$

Αδύνατο, γιατί $|X_A|^2 + 2 > 0$ και $-|X_B|^2 < 0$

Άρα κάθε σημείο Α έχει ένα συμμετρικό σημείο Β ως προς το ∞ για τα οποία ισχύει $X_A = -X_B$, δηλαδή είναι συμμετρικά και ως προς την αρχή 0 του άξονα R.

2ο υποερώτημα

Με όσα προηγήθηκαν η $\overline{\boldsymbol{R}}$ **μοιάζει να έχει σχήμα κύκλου** (ή, όπως λέμε, ομοιομορφικό του κύκλου, κλειστό σχήμα χωρίς αυτοτομές καθώς κάθε σημείο έχει διαφορετική συντεταγμένη), αφού κάθε σημείο της R αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο του κύκλου και το ∞ της $\overline{\boldsymbol{R}}$ στο «βόρειο πόλο» M του κύκλου. Σε αυτό συνηγορεί και το γεγονός ότι αν διαισθητικά παραμέναμε στο ότι η $\overline{\boldsymbol{R}}$ είναι «ευθεία» θα είχαμε $\left||A\infty|\right| = \left||AB|\right| + \left||B_\infty|\right|$, άτοπο , γιατί $\left||A_\infty|\right| = \left||B_\infty|\right|$ από 1ο υποερώτημα.

<u>3ο υποερώτημα</u>

Έστω το $\Delta(X_\Delta, 0)$, το ζητούμενο σημείο.

Θα ισχύει $\left||\Delta_\infty|\right| = \left||\Delta O|\right|$

$$\frac{2}{\sqrt{|X_\Delta|^2+1}} = \frac{2|X_\Delta - X_O|}{\sqrt{|X_\Delta|^2+1}\sqrt{|X_O|^2+1}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{|X_\Delta|^2+1}} = \frac{2|X_\Delta|}{\sqrt{|X_\Delta|^2+1}}$$

$$|X_\Delta| = 1 \leftrightarrow X_\Delta = \pm 1$$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία , το $\Delta(1,0)$ και το $E(-1,0)$.

Αφού $X_\Delta = 1$ και $X_E = -1$, τότε $\Delta \equiv \Delta'$ και $E \equiv E'$, δηλαδή είναι τα σημεία τομής του κύκλου και της ευθείας R.

Συμπεραίνουμε ότι πάνω στην γνωστή μας ευθεία $\boldsymbol{R}$ εφοδιασμένη με ένα επιπλέον σημείο ∞ δόθηκε μία μετρική $||\cdot||$ ως προς την οποία το σημείο με συντεταγμένη $\boldsymbol{x = 1}$ (και αυτό με $\boldsymbol{x = -1}$) ισαπέχει από δύο σημεία της «ευθείας-κύκλου» $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$, το $\boldsymbol{0}$ και το ∞. Αυτή η νέα μετρική, λοιπόν, παραμόρφωσε τις αποστάσεις, έτσι ώστε τελικά ο «χώρος $\boldsymbol{R}$» να αλλάξει σχήμα: η νέα μετρική «καμπύλωσε το χώρο».

Οι μαθητές: Ε. Δαμαλή, Β. Δρακονταειδή, Γ. Καραχάλιος, Ι. Σερέτη

Επιβλέπων: Α.Αλεξέλλης